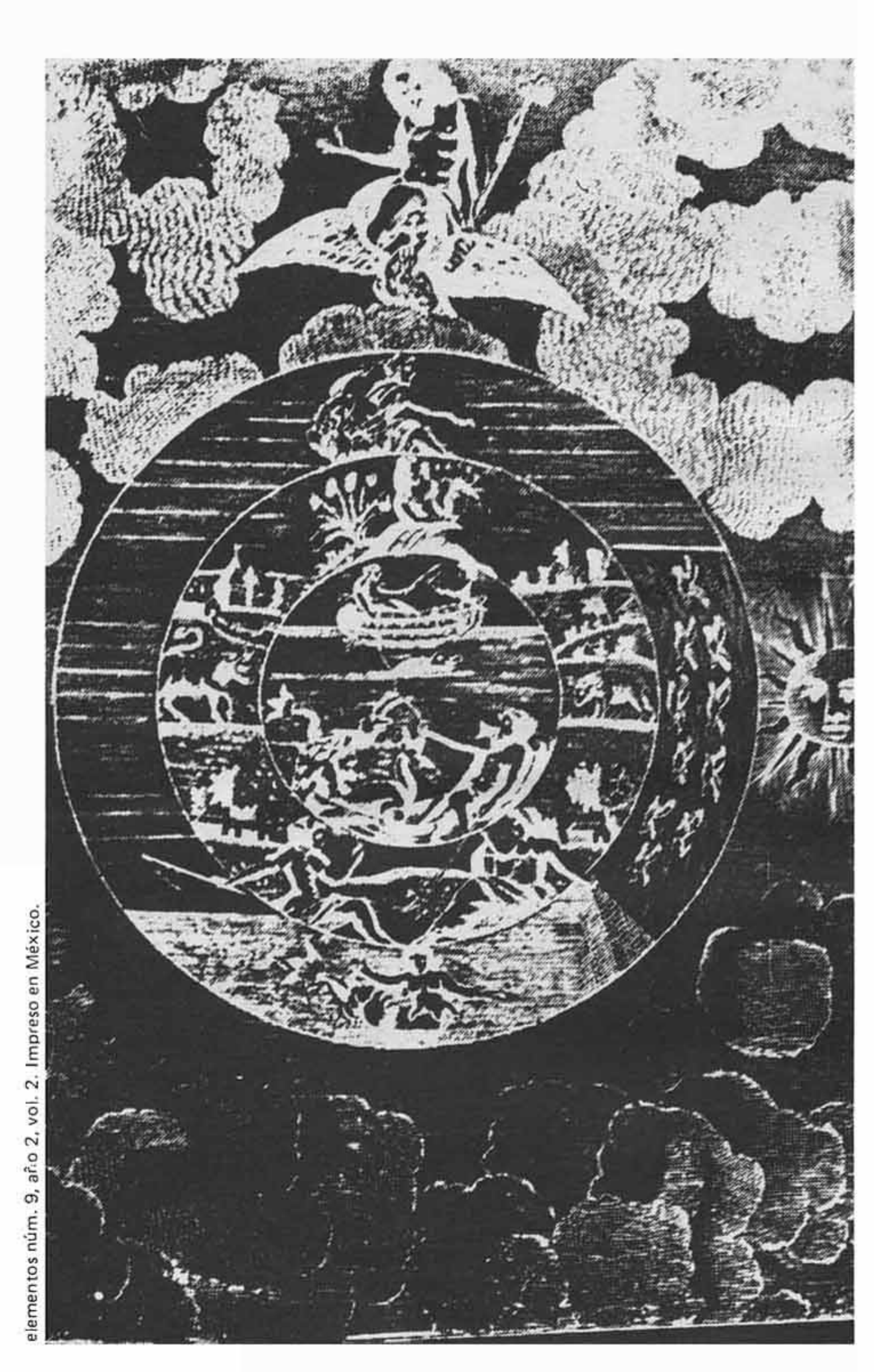
LA CONCEPTOGRAFIA Y LA LOGICA FORMAL DE FREGE



Mauricio Beuchot*

El nuevo impulso a la lógica

Gottlob Frege conoce la obra de George Boole,** pero continúa el camino de la lógica matemática de una manera distinta y con mayor amplitud. El mismo Frege aclara que, a diferencia de Boole, su lógica no es sólo un cálculo, sino todo un lenguaje universal (de caracteres o de símbolos).[1] Además, no hace depender la lógica del modelo matemático, no analiza la lógica desde la matemática (a saber, no hace un "análisis matemático de la lógica", como Boole), sino que procede a la inversa: pretende basar toda la matemática en la lógica.[2] Asimismo, se distingue de Boole en que no sólo pretente

* Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM, Ciudad Universitaria, 04000. México, D.F.

** Ver *Elementos*, núm 1, "El álgebra lógica de George Boole", pp. 48-52.

1 Frege debió conocer la obra de Boole cuando escribió su primer y revolucionario texto sobre lógica matemática, a saber, el *Begriffsschrift* (traducible ese título como *Conceptografía* o como *Escritura conceptual*), publicado en 1879, ya que sólo un año después, en 1880, desarrolla un largo artículo sobre Boole, titulado "Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift", en G. Frege, *Schriftezur Logik – Aus dem Nachlass*, Berlin, Akademie Verlag, 1973, pp. 172-226. Sobre la distinción con Boole, cfr. J. Van Heijenoort, "Logic as Calculus and Logic as Language", en *Synthese*, núm. 17 (1967), pp. 324-5.

2 Véase la introducción de J. Van Heijenoort a su traducción del *Begriffsschrift* en *Frege and Gödel. Two fundamental texts in mathematical logic*, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1980 (2nd. print.), pp. 1-2. Para una amplia presentación de esta obra de Frege, cfr. E. Chávarri, "En el centenario de *Begriffsschrift*", en *Escritos filosóficos*, núm. 28 (1979).

elementos núm. 9, año 2, vol. 2. Impreso en México.

hacer un simbolismo que dé cuenta de los conceptos ya tenidos, con los cuales se calcula, sino que permita y explique la formación de nuevos conceptos, como pone de relieve Hans Sluga: "[la lógica de Frege tenía que ser] también un métododo de formación de conceptos que pudiera generar conceptos científicamente fructíferos con conexiones completamente nuevas".[3] A dicho simbolismo Frege le da el nombre de "conceptografía" o "escritura conceptual" (*Begriffsschrift*: tal es el título de su libro publicado en Halle, 1879). Y es todo un lenguaje, es un lenguaje perfecto; así, la lógica para Frege es una *lingua characterica*, y no sólo un *calculus ratiocinator*, como lo era para Boole –los dos términos son de Leibniz–; y ese lenguaje perfecto tiene como universo de discurso todas las cosas, que pueden ahora ser tratadas científicamente gracias al nuevo simbolismo.

Evitando el psicologismo en la lógica –es decir, las cuestiones relativas al origen y formación de nuestros pensamientos–, le interesa el modo como nuestros juicios se fundamentan unos en otros.[4] Tal es el campo de la lógica pura, que investiga la argumentación o prueba tomando como fundamento las leyes del pensar. Y las verdades que requieren prueba son de dos tipos: unas exigen el recurso a la experiencia y otras sólo el recurso a la prueba puramente lógica. Pues bien, Frege trabajará sobre estas últimas, ya que le interesa la matemática, y las verdades matemáticas pertenecen a esa clase. Más aún, le interesa reducir la matemática a la lógica (o fundamentarla



en ella), en lo cual consiste el logicismo: las operaciones matemáticas son reductibles a las operaciones lógicas.[5]

La superación del lenguaje ordinario

Pero al examinar pruebas matemáticas (y lógicas) se topó Frege con la dificultad de expresarlas en un lenguaje adecuado. Por ello ideó esa escritura conceptual que evitara lagunas en las inferencias y detectara proposiciones que se hubieran introducido por inadvertencia. De las cadenas de inferencia sólo le interesará el contenido conceptual.[6] Y, ya que únicamente atenderá a lo conceptual de las proposiciones, su escritura es una escritura conceptual, una conceptografía. Si se encuentra parecido con la matemática –dice el propio Frege– es sólo relativo y en cuanto a las ideas fundamentales de la matemática misma, pues su conceptografía no procede como las matemáticas ya en lo particular, no se apega tanto a la matemática como el álgebra de Boole.

Por lo demás, la conceptografía es como un microscopio para observar con mayor lucidez el lenguaje ordinario: ayuda a detectar lo que éste oculta. Es una ayuda para fines científicos. Y es una investigación sobre el método en general, tal como quiso hacerlo Francis Bacon. Se coloca además en la línea de Leibniz y su idea de una característica universal –más que del *calculus ratiocinator*, como hemos dicho–, la cual era un método de simbolización de conceptos y que el autor de la *Monadología* nunca llegó a concluir y a hacer efectivo. Más aún, Frege no pretende –a diferencia de Leibniz– un cálculo aplicable sin más a todas las cosas y a todos los casos, sino uno que encuentre cabal aplicación en las ciencias formales, principalmente en la aritmética,[7] pues de ella había partido su investigación. Pero deja abiertos otros campos de aplicación: "El paso a la teoría del movimiento puro, y aun a la mecánica y a la física, podrían seguirse de aquí. En los últimos campos, donde junto a la necesidad racional se hace valer la necesidad natural, es donde primero es de prever un mayor desarrollo del modo de simbolización de acuerdo con el progreso del conocimiento. Pero, por eso, no es necesario esperar hasta que parezca excluida la posibilidad de tales transformaciones."[8]

Es muy clara la intensión que tiene Frege de superar las diferencias del lenguaje ordinario y alcanzar un lenguaje perfecto para los fines del científico; puede muy bien decirse que tiene un afán de análisis lingüístico reconstruccionista –al menos en esta etapa del *Begriffsschrift*– y no un afán meramente descripcionista del mismo lenguaje ordinario: hay que desenmascarar los engaños producidos por el lenguaje cotidiano, que oscurece y disfraza las auténticas relaciones

[3] H. Sluga, "Logical calculus and logical language", en prensa.

[4] G. Frege, *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros escritos filosóficos*, trad. cast. de Hugo Padilla, México, UNAM, 1972, p. 7. La hemos cotejado con la edición alemana de I. Angelelli, Hildesheim: Georg Olms, 1964 y con la trad. inglesa de J. Van Heijenoort, *Frege and Gödel. . .*, ya citada.

[5] P. Benacerraf, "Frege: the last logicist", en *Midwest Studies in Philosophy*, núm. 6 (1981), pp. 17-35.

[6] G. Frege, *Conceptografía*, ed. cit., p. 8.

[7] *Ibid.*, p. 9.

[8] *Ibid.*, p. 10.

conceptuales que se dan en lo científico y lo filosófico. Por eso, la conceptografía, ya que supera esas deficiencias del lenguaje ordinario, puede reconstruir —a partir de él— los pensamientos, de modo tal que se convierta en un instrumento valioso para el filósofo. Por lo menos llevará la argumentación a una gran pureza inferencial, consecuencial o lógica formal. Y es precisamente a los lógicos a quienes se dirige Frege ofreciéndoles una aportación, si no se fijan sólo en lo extraña que parecerá a primera vista esa innovación. Frege salvará a la lógica de la gramática ordinaria, que ha entorpecido la expresión de lo científico. "En especial —dice a este propósito—, creo que la sustitución de los conceptos de *sujeto* y *predicado* por los de [signo de] *argumento y* [nombre de] *función*, se acreditará con el tiempo. Es fácil ver cómo la aprehensión de un contenido como función de un argumento surte el efecto de una aprehensión formadora de conceptos. Más aún, la demostración de la conexión entre los significados de las palabras *si, y, no, o, existe, algunos, todos*, etc., merece atención."[9]


Bárbara Gordillo Román

Panorama general de la estereoquímica

pág. 5

[illegible]

Aspectos del análisis conformacional en el Departamento de Química del CINVESTAV

pág. 21

noticias del centro

pág. 28

sumario

Portada: Imagen especular de una molécula.
Ilustración: Hermilo Gómez Avelardi

Relación de proyectos que el Centro mantiene vigentes y cuentan con financiamiento adicional externo 1985

pág. 27

libros

pág. 44

espacio abierto

Abdus Salam

La dimensión humana del proceso de desarrollo

pág. 62

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Cinvestav

Dr. Héctor O. Nava Jaimes, Director
Editor: Dr. Enrique Campesino Romeo
Editor asistente: Carlos Chimal

Diseño: Laura García Renart
Fotografía: Agustín Estrada

Certificado de licitud 1728 y certificado de licitud de contenido 1001, otorgado por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas de la Secretaría de Gobernación. Reserva de título No. 705 82 de la Comisión General de Derechos de autor.

Avance y Perspectiva, publicación cuatrimestral editada por la Secretaría Técnica del CINVESTAV. Av. I.P.N. No. 2508, esq. Calz. Ticomán. Apartado Postal 14-740, 07000 México, D.F. Los artículos firmados son responsabilidad del autor.

Tipografía: Letras, S.A. Tlatetilpa 17, Coyoacán.
Formación: Sres. Enrique Fernández, Arturo Macías y José Garcés.
Negativos, impresión y encuadernación: Litoarte, S.A. Ferrocarril de Cuernavaca 683, Col. Ampliación Granada.

La reconstrucción del lenguaje

Frege introduce sus símbolos distinguiendo dos clases fundamentales: lo que denominamos *variables* y *constantes*. Las primeras pueden representar algo que sea distinto en diversas ocasiones, mientras que las segundas tienen completamente determinado su sentido. Las primeras serán letras, las segundas serán símbolos especiales.[10]

El juicio se expresa con el símbolo "$\vdash$" a su izquierda; éste indicará que es algo aseverado o un teorema. Tal símbolo consta de dos partes: una barra horizontal y una vertical. Cuando sólo se antepone a una fórmula la sola barra horizontal (que es la barra de contenido), indica que es una mera combinación de ideas a modo de representación, pero no de juicio; para ello le falta la barra vertical (que es la barra de aseveración o del juicio propiamente dicho). La barra de contenido indica que hay un contenido judicable, y la barra de aseveración completa el que sea un juicio.

Frege excluye del juicio la distinción sujeto-predicado (en lugar de ella dejará la de argumento-función). Una razón es que de un juicio en el que se transformen, conviertan o intercambien sujeto y predicado, se puede seguir obteniendo las mismas conclusiones —con lo cual se ve que tal distinción no tiene mucho que hacer—. Frege da el siguiente ejemplo: se sigue lo mismo de "en Platea derrotaron los griegos a los persas" y "en Platea fueron derrotados los persas por los griegos". Precisamente el contenido enjuiciable es lo que ambos tienen en común. Otra

[9] *Ibidem*. Véase también M. Beuchot, *Elementos de semiótica*, México, UNAM, 1979, pp. 17-51.

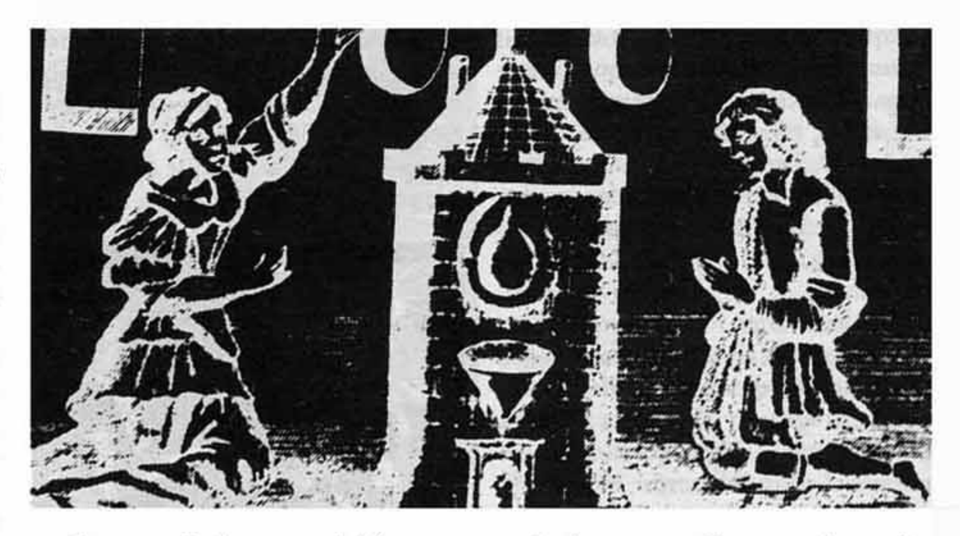
[10] G. Frege, *Conceptografía*, ed. cit., p. 13.

razón es que se puede hacer que todos los juicios sean un sujeto cuyo único predicado sea "es el caso", "es un hecho" o "es verdad" (es decir, el símbolo "⊢"); por ejemplo "Arquímedes pereció en la toma de Siracusa" puede transformarse en "la muerte violenta de Arquímedes en la toma de Siracusa es un hecho".[11]

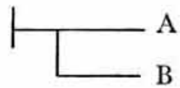
Frege pasa a la clasificación de los juicios (o, más correctamente, de los contenidos enjuiciables). Dice que la distinción entre juicios categóricos e hipotéticos es meramente gramatical, y que lógicamente son lo mismo. La prueba que aduce Frege para esto —nos dice él mismo— es su libro entero. El sólo se abocará a los categóricos. También quita toda importancia a la distinción entre juicios apodícticos (o modales) y asertóricos, dado que no toca el contenido conceptual del juicio. Por ello, trabajará sólo con asertóricos.[12] Los juicios asertóricos categóricos, en seguida, reciben de Frege la división clásica según su cantidad: universal y particular;[13] y añade un poco después de cualidad (afirmativa y negativa), obteniendo finalmente el cuadrado tradicional de las oposiciones.[14]

La constitución del sistema

De entre las nociones y símbolos primitivos que establece para su cálculo, Frege trata la condicionalidad y otras conectivas, la negación, la igualdad o equivalencia (de contenido enjuiciable), la idea de función y la generalidad (o cantidad universal del juicio).



Al tratar de la proposición condicional, Frege la define como implicación material (sólo prohibe el paso de lo afirmado —como verdadero— a lo negado —como falso—). No hace falta una relación causal entre los contenidos, y el símbolo de la condicional es



donde la proposición A es el antecedente y la B es el consecuente: "si A, entonces B".[15] De modo que el símbolo es la *barra de condición* que une las dos horizontales de A y B.

Añade Frege observaciones sobre la numeración de juicios en una inferencia, para tener control de todos ellos. La inferencia debe ser controlada y rigurosa. Y como regla única de inferencia Frege adopta el *modus ponens*, que tiene su aplicación en las proposiciones condicionales o implicaciones. Nos dice de las reglas inferenciales o modos de inferir: "Con Aristóteles, podemos enumerar en lógica una serie completa de modos de inferencia; yo sólo me sirvo de éste —al menos, en todos los casos en que de más de un solo juicio se deriva uno nuevo."[16] Los demás modos o reglas de inferencia se pueden reducir —para Frege— al *modus ponens*. Por eso sólo acepta éste. Y hace notar que no trata la inferencia de modo psicologista (en cuanto a la formación de ésta en la mente), sino de modo logicista y formalista (en cuanto a las reglas de inferencia).

Pasa a estudiar la negación, que es importantísima en lógica. Su símbolo es una pequeña barra vertical perpendicular a la barra de contenido en su parte inferior, así: ⊢┬ A. La barra de negación indica que el contenido enjuiciable no tiene lugar. Mediante la negación, Frege define la disyunción o proposición disyuntiva, en sentido inclusivo, o sea, usando "o" en el sentido de que en "A o B" no se excluye la coexistencia de ambos juicios. También toma en cuenta la disyunción exclusiva: "o A o B", en la que se excluye la coexistencia de ambas. Pero aclara que tomará la disyunción en sentido inclusivo, como ya lo hemos señalado.

Un peldaño posterior es su definición del conectivo "y", o la conjunción. Frege define la conjunción mediante la condicional y la negación, aunque dice que la misma condicional podría expresarse, a la inversa, mediante la conjunción y la negación. Pero él prefiere expresar (o definir) la conjunción en términos de negación y condicional,[17] como la negación

[11] J.A. Robles, "La generalidad múltiple y la cuantificación en la lógica de Frege", en *Episteme*, núm. 4 (1980), pp. 37-42.

[12] G.E. Rosado Haddock cuestiona esa fusión alegando que Frege no la justifica lo suficiente. Especialmente pone en tela de juicio la exclusión de la distinción entre lo asertórico y lo modal (por descuidar implicaciones ontológicas). G.E. Rosado Haddock, *Exposición crítica de la filosofía de Gottlob Frege*, República Dominicana, 1985, p. 26.

[13] G. Frege, *Conceptografía*, ed. cit., p. 16.

[14] *Ibid.*, p. 36.

[15] *Ibid.*, p. 17.

[16] *Ibid.*, p. 21.

[17] *Ibid.*, p. 25.

de que del antecedente B se siga el consecuene no-A, o sea que puede llegarse incluso a expresarla como "ni-ni-A-, ni-ni-B es un hecho". Por lo demás, Frege aclara que a la "y" se reducen otras partículas, como "pero". Así pues, los conectivos "ni. . .ni. . .", "y", "o", "si. . . entonces. . ." relacionan contenidos enjuiciables.[18]

Otro conectivo importante es la igualdad o equivalencia de contenido. Frege, en esta época de su pensamiento que tomamos en cuenta —cuando escribe el *Begriffsschrift*— aclara que la igualdad se da entre nombres, y no entre contenidos enjuiciables sin más. Lo presenta en ese entonces diciendo que, si se da la circunstancia de que dos nombres tengan el mismo contenido conceptual, tal circunstancia se expresa con el signo de igualdad.[19] Sin embargo, posteriormente cambia su idea de la igualdad, se da no sólo entre nombres de objetos, sino entre objetos. Esta es la conexión lógica que más problemas trajo a Frege: no se trata de una mera igualdad entre símbolos tomados materialmente, o tomados en la materialidad de su expresión, o en cuanto meros símbolos, pues entonces sería verdad que "$a = a$", pero no lo podría ser que "$a = b$", lo cual, sin embargo, muy bien puede ocurrir y de hecho muchas veces ocurre. Es una identidad de referencia (*Bedeutung*); lo cual obliga a Frege a distinguir entre el uso y la mención de una expresión: cuando la usamos, nos estamos refiriendo a aquello que normalmente tiene como referente —el objeto que designa—; en cambio, cuando la mencionamos, nos estamos refiriendo a ella misma en cuanto expresión material. (Es la distinción entre lo que hasta Alfred Tarski se llamará meta-lenguaje y lo que se llamará lenguaje-objeto.)



Este conectivo de igualdad o identidad —Frege dice que lo toma en ambos sentidos— también lo obligará posteriormente, en el mencionado artículo de 1892 "Ueber Sinn und Bedeutung", a distinguir entre sentido y referencia de una expresión,[20] dado que dos expresiones pueden ser idénticas en referencia a pesar de ser diversas en sentido, como "el Lucero Matutino" y "el Lucero Vespertino", pues ambas expresiones se refieren al planeta Venus, pero de un modo o con un sentido diferente. En efecto, el sentido es distinto porque, aun cuando designan lo mismo, lo hacen infomando, evocando o asociando cosas distintas. Esta circunstancia es expresada así por Frege: "el mismo contenido se puede determinar plenamente de diferentes modos; pero que en un caso particular se ve realmente *lo mismo* por medio *de dos maneras de determinarlo*, es el contenido de un *juicio*. Antes de hacer éste, se deben asignar dos nombres distintos correspondientes a ambos modos de determinación, a lo determinado por ellos. Para su expresión, el juicio requiere, empero, un símbolo de la igualdad de contenido que conecte estos dos nombres. De aquí resulta que los nombres distintos para el mismo contenido no siempre son meramente una ociosa cuestión de forma, sino que atañen a la naturaleza del asunto cuando se conectan con diferentes modos de determinación. En este caso, el juicio que tiene por objeto la igualdad de contenido es sintético en sentido kantiano."[21] El símbolo es: "$\vdash (A \equiv B)$" y expresa que B puede sustituir *salva veritate* —como decía Leibniz— en cualquier caso a A. La razón de que pueda B ponerse en lugar de A es que ambos tienen el mismo contenido conceptual, como ya se dijo.

Función, argumento y cuantificación

Trata entonces Frege de la compaginación de los componentes del juicio; para él, en lugar de sujeto y predicado, se debe hablar de signo de argumento y nombre de función. El signo de argumento es lo sustituible, puede remplazar a diversos contenidos conceptuales; la expresión funcional es la parte constante del enunciado que expresa el juicio. Lo establece así: "si en una expresión cuyo contenido no necesita ser enjuiciable, aparece un símbolo simple o compuesto en uno o más lugares, y si lo pensamos como remplazable en todos o en algunos de estos lugares por algo distinto, pero siempre por lo mismo, entonces a la parte de la expresión que aparece sin cambio la llamamos función y a la parte remplazable, su argumento".[22]

18 *Ibid.*, p. 26.

19 *Ibidem*. Cuando Frege escribe su artículo de 1892, *Ueber Sinn und Bedeutung*, comienza el texto señalando su error. Justamente es el problema de la igualdad el que le hará plantear en ese escrito la distinción —capital en la semiótica— entre *sentido* y *referencia*. G. Frege, "Sobre el sentido y la denotación", en T.M. Simpson (ed.), *Semántica filosófica: problemas y discusiones*, Buenos Aires: Siglo XXI, 1973, p. 3.

20 Sobre estos temas, véase Ch. Thiel, *Sentido y referencia en la lógica de Gottlob Frege*, Madrid, Tecnos, 1972; M. Dummett, *Frege philosophy of language*, London, Duckworth, 1973; H. Sluga, *Gottlob Frege*, London, 1980.

21 G. Frege, *Conceptografía*, ed. cit., p. 27.

22 *Ibid.*, pp. 28-29.



Precisamente el argumento o el objeto, y la función, serán después las piezas fundamentales de la ontología fregeana.[23]

El que una parte de la expresión sea argumental y la otra funcional depende del punto de vista: en "Pedro golpeó a Malco" el argumento puede ser "Pedro" y la función puede ser "golpeó a Malco" o el argumento puede ser "Malco" y la función puede ser "fue golpeado por Pedro". Además, la función puede tener uno o más argumentos. Frege representa a la función monoargumental así: "Φ (A)" y la biargumental, por ejemplo, así: "Ψ (A, B)". Añade otras observaciones complicadas sobre el orden y la jerarquía de las funciones, y pasa a la cuantificación, tanto la de variables individuales como la de funciones, es decir, tanto la cuantificación simple como la cuantificación múltiple.[24] Principalmente, expone la cuantificación general o universal (sustitucional), que simboliza como "⊢⌣—( )".

Por lo demás, Frege es consciente de que puede estructurar su sistema lógico como una construcción axiomática, pero que habría varias maneras de hacerlo. No importa tanto aquí justificar la elección de Frege, cuanto destacar que tenía una idea —aunque no del todo clara— de tal axiomática. Lo declara así: "Es patente que no es lo mismo conocer meramente las leyes que conocer también cómo se compadecen unas con otras. De esta manera, se obtiene un pequeño número de leyes de las cuales, si se aceptan las contenidas en las reglas, se incluye el contenido de todas, aunque no desarrollado. También es una ventaja del modo deductivo de presentación el que enseñe a conocer ese núcleo. Puesto que de la inabarcable cantidad de leyes formulables no se pueden enumerar todas, entoces no se alcanzará la totalidad, como no sea buscando aquellas que, *por su fuerza*, contengan en sí a todas."[25]

Finalmente, cabe destacar las aclaraciones que Frege tuvo el cuidado de hacer para complementar su exposición teórica de la conceptografía. El mismo año de aparición del *Begriffsschrift* publica un artículo sobre diversas aplicaciones de su escritura conceptual,[26] cuyos elementos principales hemos mencionado al comentar el prólogo de la *Conceptografía*. Asimismo, en 1882 publica otro artículo en el que desarrolla algunos argumentos en los cuales quiere probar que se justifica para la ciencia una escritura conceptual de este tipo. El principal argumento es la superación de las ambigüedades[27] del lenguaje ordinario, ya en la línea de lo que después se llamará "filosofía analítica".[28] Y el año siguiente, en 1883, publica otro artículo en el que habla del objeto y finalidad de su conceptografía, mostrando cuidadosamente las diferencias de ésta con respecto al álgebra de Boole, de la cual él se ha distanciado. Como hemos visto, Frege dice —valiéndose de expresiones leibnizianas— que Boole sólo ha llegado a elaborar un *calculus ratiocinator* (o un cálculo de raciocinio, de la inferencia o deducción), mientras que él ha llegado a crear una *lingua characterica* o *characteristica universalis*, es decir, un lenguaje (o escritura) conceptual más amplio, del que el cálculo deductivo es sólo una parte.[29] Se trata de la lógica como lenguaje perfecto, que es la idea que Bertrand Rusell tomará de Frege.

23 M. Beuchot, "El problema de los universales en Gottlob Frege", en *Crítica*, UNAM, IX/26 (1977), pp. 65-89, también recogido en *Idem*, *El problema de los universales*, México, UNAM, 1981.

24 J.A. Robles, *artículo citado.*

25 G. Frege, *Conceptografía*, ed. cit., p. 37.

26 *Idem*, "Anwendungen der Begriffsschrift", en *Idem*, *Begriffsschrift un andere Aufsätze*, ed. I. Angelelli, Hildesheim: G. Olms, 1964, pp. 89-93.

27 *Idem*, "Sobre la justificación científica de una conceptografía", en la trad. ya citada de H. Padilla, pp. 209-214.

28 M. Dummett, "Can analytical philosophy be systematic, and ought it to be?", en *Idem*, *Truth and other enigmas*, London: Duckworth, 1978, pp. 437 ss.; M.D. Resnik, "Frege and analytical philosophy: facts and speculations", en *Midwest Studies in Philosophy*, núm. 6 (1981), pp. 83-103.

29 G. Frege, "Sur le but de l'idéographie", en *Idem*, *Ecrits logiques et philosophies*, introd. y trad. C. Imbert, Paris, Eds. du Seuil, 1971, pp. 70-79.